



TITLE:

円柱を過ぎる遷音速流(ナビエ・ストークスの方程式の解)

AUTHOR(S):

石井, 克哉

CITATION:

石井, 克哉. 円柱を過ぎる遷音速流(ナビエ・ストークスの方程式の解).
数理解析研究所講究録 1984, 539: 157-169

ISSUE DATE:

1984-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98726>

RIGHT:

円柱を過ぎる遷音速流

東大 理 石井克哉
(ISHII Katsuya)

1. はじめに

円柱を過ぎる一様流の問題は流体力学における古典的な問題の一つである。しかし、多くの状況において大規模な剝離現象を伴うため理論的あるいは数値的研究は非圧縮の低レイノルズ数など剝離現象の少ない領域に集中している。

最近、J. S. Shang は円柱を過ぎる圧縮流れをマッハ数 0.6 の場合について数値計算を行なった。用いたスキームは MacCormack の陽解法であるが、この解法は能率がよくない。この研究では、現在よく用いられている比較的効率のよいスキーム Beam-Warming-Steger 法により円柱を過ぎるマッハ数 0.3 - 0.98 の遷音速流の数値計算を行なった。

2. 計算方法

基礎方程式は一般化された二次元圧縮性ナビエ-ストークス

方程式であり、

$$\partial_{\tau} \mathbf{q} + \partial_{\xi} \mathbf{M} + \partial_{\eta} \mathbf{N} = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{E} - 1/\text{Re} \, \mathbf{R}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{F} - 1/\text{Re} \, \mathbf{S}, \quad (2)$$

$$\mathbf{q} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ (e+p)U - \xi_t p \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ (e+p)V - \eta_t p \end{pmatrix}. \quad (3)$$

と表わせる。ただし、 ρ は密度、 u , v はデカルト座標系 (x, y) 、 U , V は一般化座標系 (ξ, η) のそれぞれ速度成分であり、 \mathbf{R} , \mathbf{S} は粘性項を表わす。これらの式は B W S 法により次式のように分解できる：

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{I} + \Delta\tau \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{q}} \right)^n \right) \left(\mathbf{I} + \Delta\tau \left(-\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\mathbf{F} - \frac{1}{\text{Re}} \mathbf{S}_{\eta} \right)^n \right) \right) \Delta \mathbf{q}^n \\ & = -\Delta\tau \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{M} + \frac{\partial}{\partial \eta} \mathbf{N} \right)^n + O(\Delta\tau^2), \end{aligned}$$

$$\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^n + \Delta \mathbf{q}^n$$

B W S 法は計算の安定化のため二種の人工拡散項を付加している。一つは四階微分を陽の形で付加したものであり、もう一つは二階微分を陰の形で付加したものである。前者は影響が局所的であり、エイリアシング誤差を取り除くためにも是非必要なものであるが、後者は粘性拡散に近い性質を持ち、広範囲に渡って悪い影響を生む可能性がある。定常な流れの計算において二階微分の拡散項の悪影響は陰の項のため問題とならないが、この研究におけるような非定常性の強い流れに B W S 法を適用する時は十分な注意が必要となる。この計算では時間きざみ、陽の人工拡散項の強さを十分注意して選ぶことにより陰の拡散項なしでも安定に計算を行なっている。剝離の強い領域で十分満足できる乱流拡散モデルは現在までのところ存在しない。ここでの多く計算では不確かな二階微分の乱流拡散モデルを使用しなかった。このため、メッシュサイズ以下の構造へのエネルギーの流出及びエネルギー散逸は、計算の安定化のために入れられた四階微分の人工拡散と二階微分の分子粘性によりなされていると考えられる。

マッハ数 0.3 と 0.8 の時はレイノルズ数 1000 と 5×10^6 の場合を、マッハ数 0.95 と 0.98 の時はレイノルズ数 5×10^6 のみを計算した。各場合のパラメーターの値は

表 1 に示めす。また、マッハ数 0.95, 0.98 の場合に使用した格子点を第 1 図に示した。

計算には、主に、昨年 11 月より動き出した東大大型計算機センターのスーパーコンピュータ HITACHI S810 モデル 20 を用いた。いくつかのコンピュータによる計算時間の比較は表 3 にまとめてある。

3. 計算結果

マッハ数 0.3 及び 0.8 の場合の定量的な結果は表 2 にまとめた。マッハ数 0.3 の結果は非圧縮の実験結果と一致しており、レイノルズ数 1000 の流れ場は典型的なカルマン渦列の放出の様子をしめす。レイノルズ数 5×10^6 の場合、後流が狭くなり、抵抗は減少する。しかし、この場合、後流の発達が遅く、完全に落ち着いた状態まで計算することができなかった（第 2 図）。マッハ数 0.8 の場合、抵抗のレイノルズ数依存性は 0.3 の場合と逆に大きなレイノルズ数の時大きな抵抗を示している。対応する流れ場も、レイノルズ数 1000 の時には円柱背後の超音速領域に押さえられ後流が発達していないのに対し、レイノルズ数 5×10^6 の時にははっきりとした渦列がみえる。また、このとき強い衝撃波は現われないが、圧縮

性のため流れは大きく蛇行しており、後流の広がり小さくなっている（第3図）。

第4図にマッハ数0.95の計算結果を示す。円柱の直径の二倍ほど後ろに鋭い衝撃波が形成され、そのあたりまで後流が狭まり、以後急激に巾を広げていることがわかる。また、抵抗は増大する。マッハ数0.98の結果は第5図にまとめてある。このときは、三つの衝撃波が形成され、 λ ショックを形作る。円柱背後での後流の狭まりは一層強くなり、斜め衝撃波による流速ベクトルの向きの変化がはっきりと見える。これら0.8, 0.95, 0.98のマッハ数の実験によるシャドウグラフと計算で出した等密度線図の比較を第6図に示した。いずれの場合もよく一致しているのがわかる。

最後に、円柱を過ぎる超音速流れの計算の途中結果としてマッハ数2.0の等マッハ数線図と等密度線図を第7図に示す。大きく弧を描いた前方衝撃波、物体直後での後流の狭まり、円柱の直径くらい後方に作られる第二の衝撃波などがわかる。直接比較できる実験結果を知らないが、これらのことは球に対する実験結果によく類似している。

4. まとめ

前節で見たように、非定常で剝離現象を伴う遷音速及び超音速の流れ場に対し、BWS法を用いた Full Navier-Stokes 方程式の数値計算が満足のゆく結果を与えることがわかった。また、このとき陰の二階微分拡散項や二階微分を含む乱流モデルを使わなくても計算が実行でき、流れの大域的構造を非常によくシミュレートできることもわかった。たとえば、流れの圧縮性により後流の狭まり、形成される衝撃波のマッハ数に依存性とその位置など、遷音速、超音速いずれの場合もきれいな結果が得られている。

二次元の複雑な流れの数値計算はスーパーコンピュータにより十分可能なものになったと言えよう。

Reference

- 1) J. S. Shang : AIAA paper, 82-0098 (1982).
- 2) R. Beam and R. F. Warming : J. Comp. Phys. 22 (1976).

- 3) W. J. Chu and K. Kuwahara :
A I A A paper , 82 - 0350 (1982) .
- 4) M. Van Dyke : " An Album of
Fluid Motion " Parabolic
Press (1982) . (本文中の実験の写真はこれよ
り引用した。)
- 5) K. Ishii and K. Kuwahara :
A I A A paper , 84 - 1631 (1984) .

表 1

Number of Grid Points

121 x 61 for $M = 0.3$ & 0.8 181 x 69 for $M = 0.95$ & 0.98

Time Step

0.01 for $M = 0.3$ & 0.8 0.005 for $M = 0.95$ & 0.98

Explicit Smoothing Factor

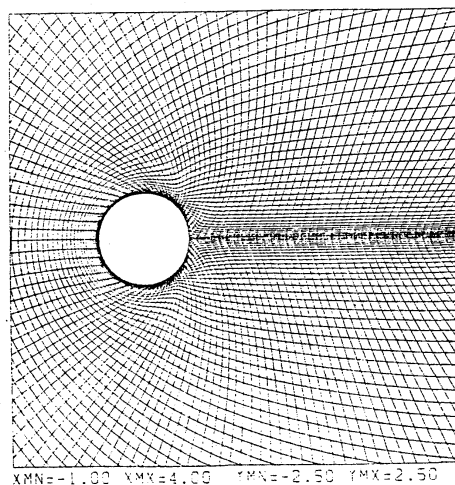
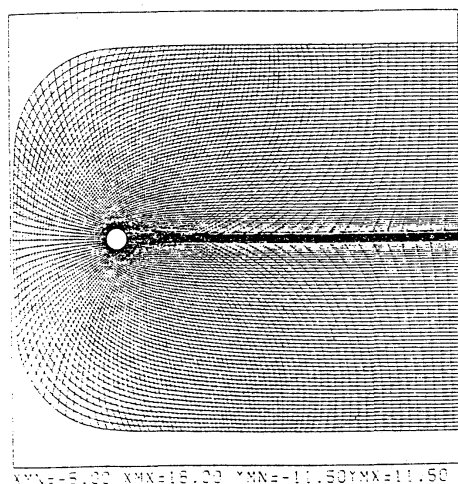
0.02 for $M = 0.3$ 0.05 for $M = 0.8, 0.95$ & 0.98

Implicit Smoothing Factor

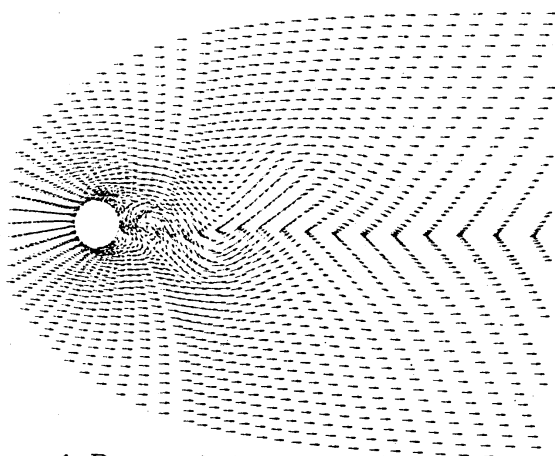
0 for all cases

表 2

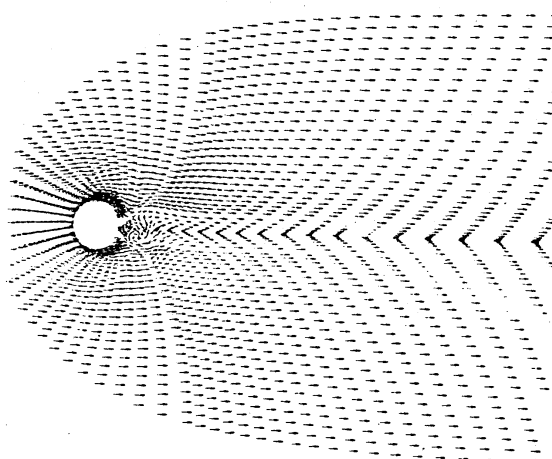
	$M = 0.3$	$M = 0.8$
$Re = 1000$	Strouhal No. = 0.195 $C_D = 1.4 \pm 0.1$ $ C_L _{MAX} = 1.26$	Strouhal No. = 0.10 $C_D = 0.95 \pm 0.06$ $ C_L _{MAX} = 0.016 \pm 0.008$
$Re = 5 \times 10^6$	Strouhal No. — $C_D = 0.75 \pm 0.5$ $ C_L _{MAX} = —$	Strouhal No. = 0.202 $C_D = 1.7 \pm 0.1$ $ C_L _{MAX} = 0.45$



第1図 計算格子 (181 x 69)

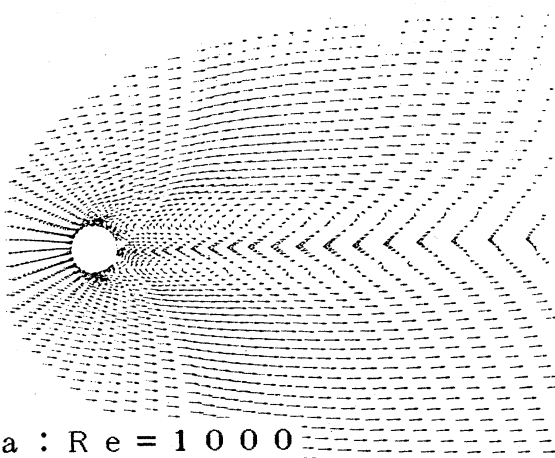


a : $Re = 1000$

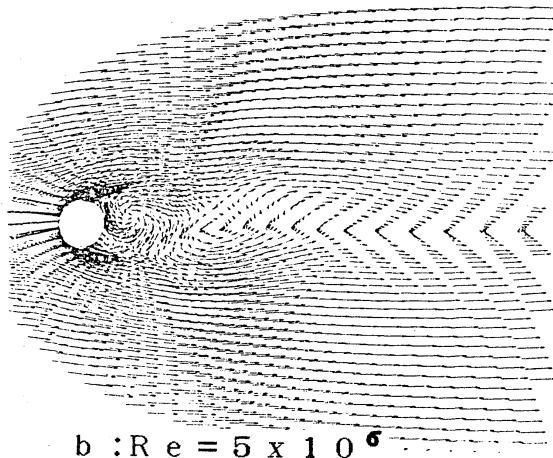


b : $Re = 5 \times 10^6$

第2図 マッハ数0.3の流速ベクトル図

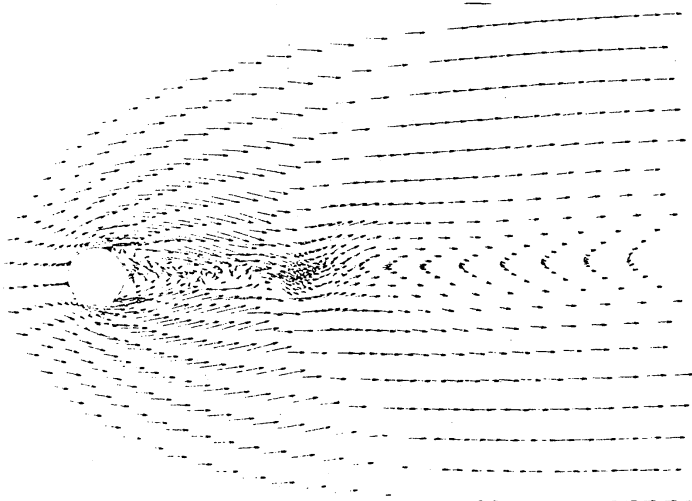
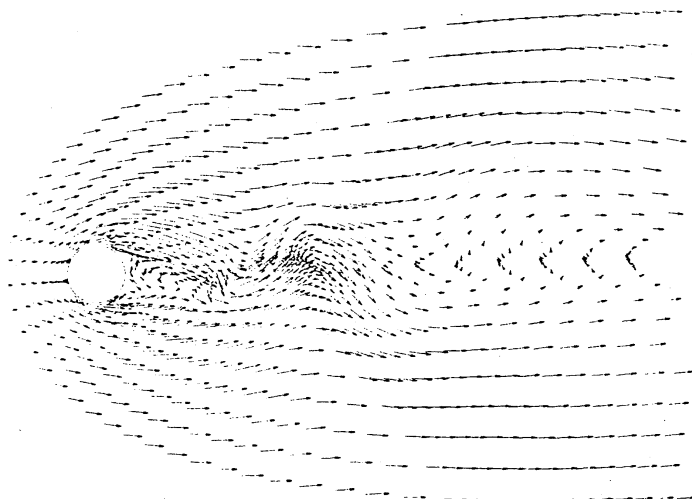


a : $Re = 1000$

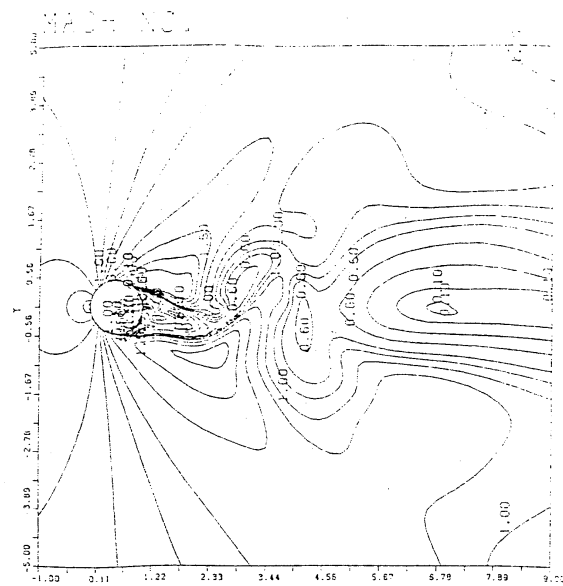


b : $Re = 5 \times 10^6$

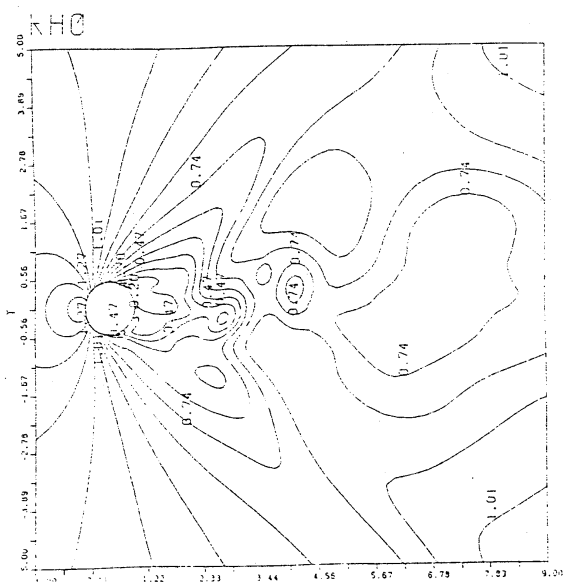
第3図 マッハ数0.8の流速ベクトル図



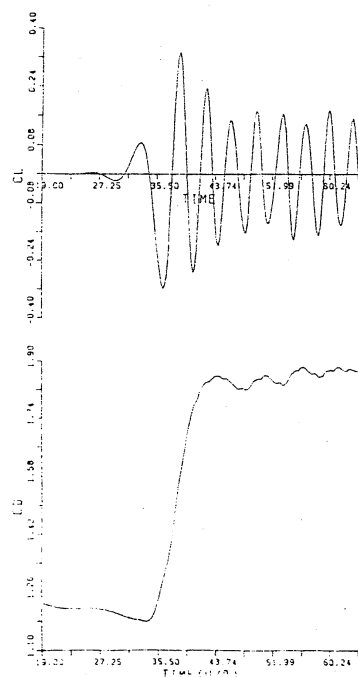
a : 流速ベクトル



b : 等マッハ線図

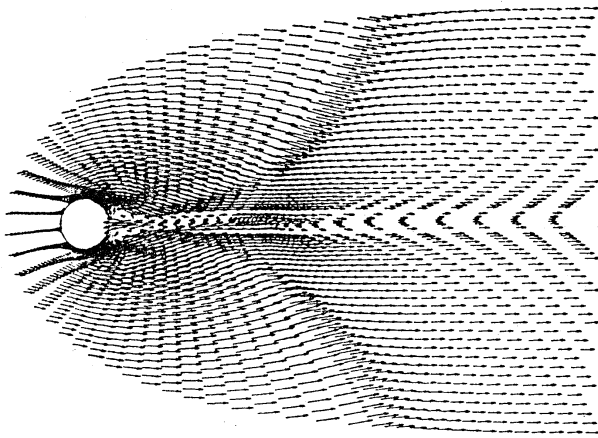


c : 等密度線図

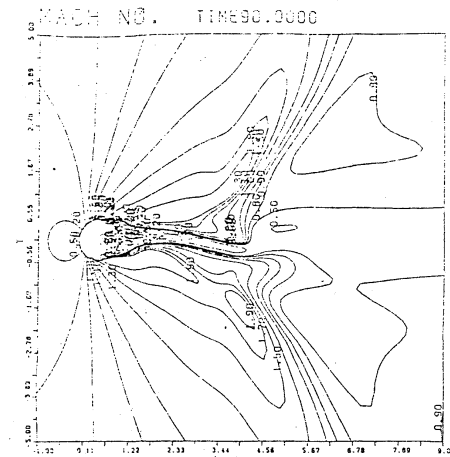


d : 抵抗係数、揚力係数の時間変化

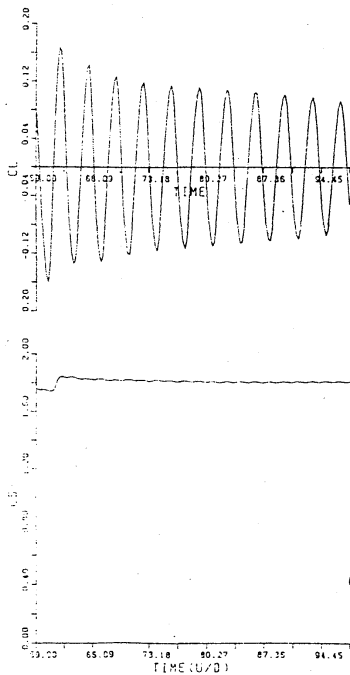
第4図 マッハ数0.95の流れ場



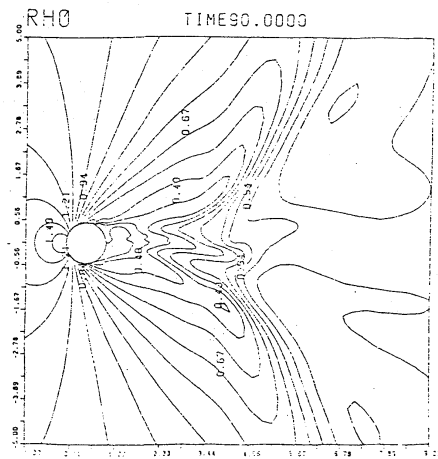
a : 流速ベクトル



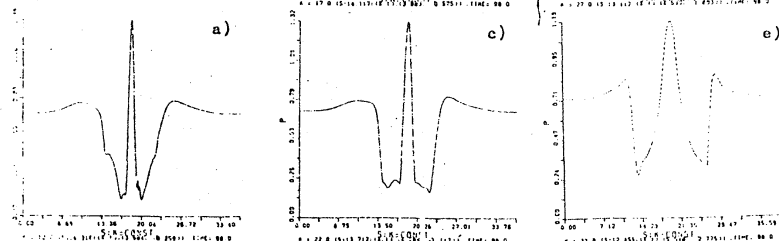
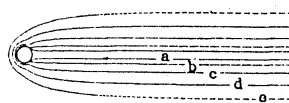
b : 等マッハ線図



d : 抵抗係数、揚力係数の時間変化

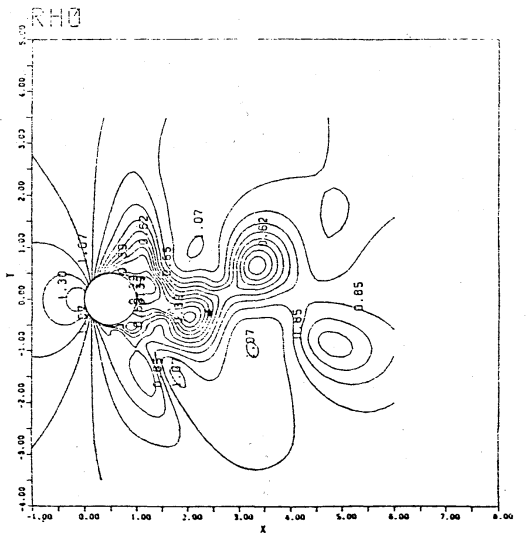
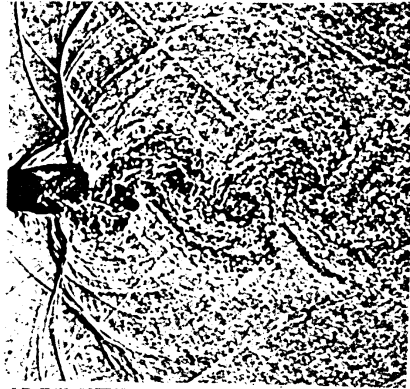


c : 等密度線図

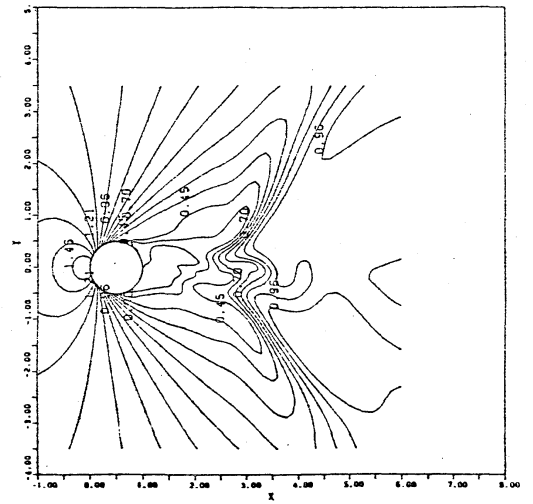
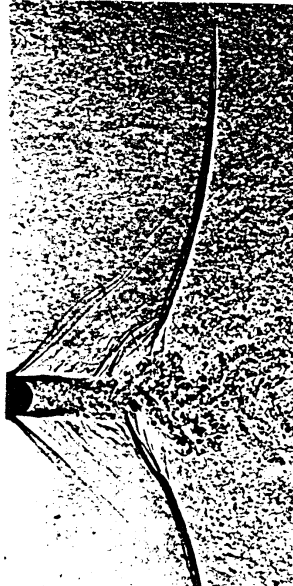
e : η = 一定の線上での圧力変化

第5図 マッハ数0.98の流れ場

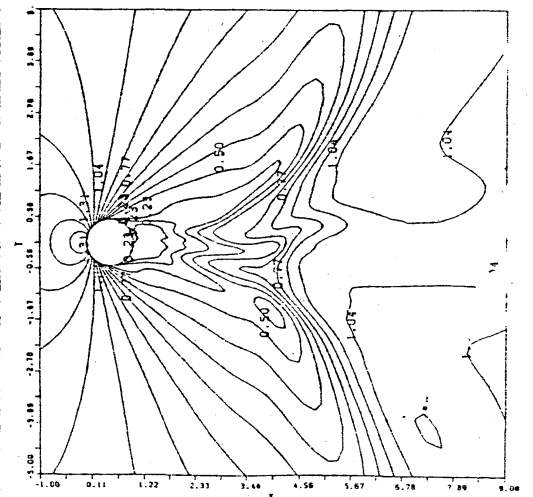
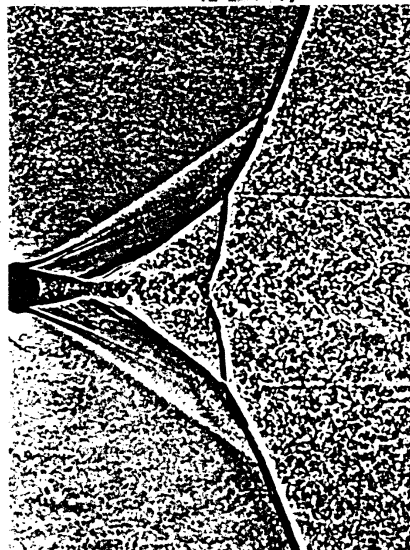
M=0.8



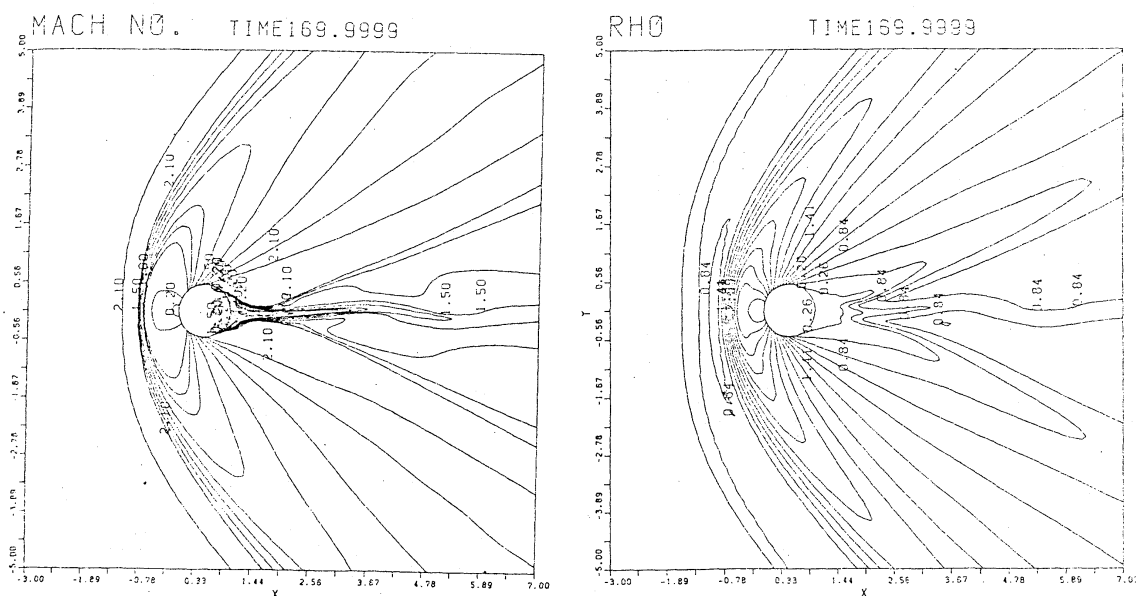
M=0.95



M=0.98



第6図 実験との比較 (実験はD y m e n t e t . a l . による。)



第7図 マッハ数2.0の等マッハ線図と等密度線図

表 3

		1. step	CPU time per 1 mesh point and per 1 step	
S810 (HITACHI)				
87	x 41 (total 3567)	0.11sec	vector	3.1×10^{-5}
121	x 60 (7260)	0.19sec	vector	2.6×10^{-5}
181	x 69 (12489)	0.26sec	vector	2.1×10^{-5}
VP200 (FUJITSU)				
121	x 60 (7260)	0.19sec	vector	2.6×10^{-5}
Cray 1S				
87	x 41 (3567)	0.22sec	vector	6.2×10^{-5}
M280H IAP (HITACHI)				
87	x 41 (3567)	1.23sec	vector	
		2.50sec	scalar	
M200H (HITACHI) or CDC7600				
87	x 41 (3567)	3.70sec	scalar	